

Самостійна робота з дисципліни “Комп’ютерна алгебра”

Варіант 10

Метод: Алгоритм Кронекера факторизації багаточленів.

Завдання №16

поліном: $f(x) = 2x^4 + 10x^3 - 16x - 80$

Згідно з методом Кронекера, шукаємо дільник $g(x)$ першого степеня ($s=1$) з цілими коефіцієнтами

1. Для пошуку полінома першого степеня потрібно обрати $s+1 = 2$ цілих значення змінної x

Нехай $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Обчислимо значення багаточлена $f(x)$ у цих точках:

- $f(0) = 2(0)^4 + 10(0)^3 - 16(0) - 80 = -80$
- $f(1) = 2(1)^4 + 10(1)^3 - 16(1) - 80 = 2 + 10 - 16 - 80 = -84$

2. Якщо поліном $g(x)$ ділить $f(x)$, то $g(x_0)$ має бути дільником $f(x_0)$, а $g(x_1)$ — дільником $f(x_1)$.

Випишемо множини цілих дільників для знайдених значень:

- M_0 (дільники числа -80): $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 16, \dots\}$
- M_1 (дільники числа -84): $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 7, \pm 12, \dots\}$

3. Шуканий поліном $g(x)$ має вигляд $g(x) = ax + b$

Нехай $g(0) = y_0 \in M_0$ та $g(1) = y_1 \in M_1$.

За інтерполяційною формулою (або системою рівнянь) маємо:

$$b = y_0$$

$$a + b = y_1 \rightarrow a = y_1 - y_0$$

Крім того, старший коефіцієнт a має бути дільником старшого коефіцієнта багаточлена $f(x)$ (тобто дільником числа 2). Отже, $a \in \{\pm 1, \pm 2\}$.

4. Шукаємо такі пари (y_0, y_1) з множин M_0 та M_1 , різниця яких дорівнює ± 1 або ± 2 :

1. Перевіримо $y_0 = -2 \in M_0$. Нехай $a = 1$. Тоді $y_1 = y_0 + a = -2 + 1 = -1 \in M_1$
Кандидат: $g_1(x) = x - 2$
2. Перевіримо $y_0 = 5 \in M_0$. Нехай $a = 1$. Тоді $y_1 = y_0 + a = 5 + 1 = 6 \in M_1$
Кандидат: $g_2(x) = x + 5$

5. Перевіряємо діленням, тобто ділимо $f(x)$ на отримані кандидати:

- $f(2) = 2(16) + 10(8) - 16(2) - 80 = 0$. Отже, $(x - 2)$ є дільником
- $f(-5) = 2(625) + 10(-125) - 16(-5) - 80 = 0$. Отже, $(x + 5)$ є дільником

6. Виділяємо частку, отже, ділимо $f(x)$ на добуток знайдених множників

$$(x - 2)(x + 5) = x^2 + 3x - 10: (2x^4 + 10x^3 - 16x - 80) / (x^2 + 3x - 10) = \\ = 2x^2 + 4x + 8 = 2(x^2 + 2x + 4)$$

Квадратний тричлен $x^2 + 2x + 4$ має від'ємний дискримінант і не розкладається на дійсні множники.

Відповідь: $f(x) = 2(x - 2)(x + 5)(x^2 + 2x + 4)$

Завдання №22

поліном: $f(x) = x^5 + 5x^4 - 16x - 80$

Шукаємо лінійний дільник $g(x) = ax + b$ степеня $s=1$

1. Обираємо точки та обчислюємо значень $x_0 = 0, x_1 = 1$

- $f(0) = -80$
- $f(1) = 1 + 5 - 16 - 80 = -90$

2.

- M_0 (дільники числа -80): $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 8, \pm 10, \pm 16, \dots\}$
- M_1 (дільники числа -90): $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 9, \pm 10, \dots\}$

3. Старший коефіцієнт $f(x)$ дорівнює 1, тому старший коефіцієнт дільника $a = \pm 1$

Нехай $a = 1$. Оскільки $g(0) = y_0$ та $g(1) = y_1$, то $y_1 - y_0 = 1 \rightarrow y_1 = y_0 + 1$

4. Шукаємо такі $y_0 \in M_0$, для яких $y_0 + 1 \in M_1$:

1. $y_0 = -2 \in M_0 \rightarrow y_1 = -1 \in M_1$. Кандидат: $g_1(x) = x - 2$
2. $y_0 = 2 \in M_0 \rightarrow y_1 = 3 \in M_1$. Кандидат: $g_2(x) = x + 2$
3. $y_0 = 5 \in M_0 \rightarrow y_1 = 6 \in M_1$. Кандидат: $g_3(x) = x + 5$

5.

- $f(2) = 32 + 80 - 32 - 80 = 0$ (Множник $x-2$ підтверджено)
- $f(-2) = -32 + 80 + 32 - 80 = 0$ (Множник $x+2$ підтверджено)
- $f(-5) = -3125 + 3125 + 80 - 80 = 0$ (Множник $x+5$ підтверджено)

6. Знайдемо добуток усіх виявлених лінійних множників

$$(x - 2)(x + 2)(x + 5) = (x^2 - 4)(x + 5) = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$$

Розділимо початковий поліном на цей добуток

$$(x^5 + 5x^4 - 16x - 80) / (x^3 + 5x^2 - 4x - 20) = x^2 + 4$$

Цей двочлен не має дійсних коренів і далі не розкладається.

Відповідь: $f(x) = (x - 2)(x + 2)(x + 5)(x^2 + 4)$